

Técnicas para problemas de desigualdades

Notas extraídas del libro de Arthur Engel [1]

11 de noviembre de 2022

En esta sesión nos centramos en los problemas donde aparecen desigualdades entre números. Algunos de estos problemas se pueden resolver de un modo casi trivial sin más que aplicar algunas de las técnicas que veremos aquí, sin embargo otros problemas de desigualdades necesitarán de un empleo más audaz del contenido de esta sesión y, por supuesto, de nuestra experiencia, tenacidad y madurez a la hora de resolver problemas matemáticos.

1. Medias

Comenzamos con dos de las desigualdades más básicas pero al mismo tiempo más importantes. Sean x, x_1, x_2, \dots, x_n números reales, entonces

$$x^2 \geq 0 \tag{1}$$

y

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0. \tag{2}$$

La igualdad se da en ambas sólo cuando $x = 0$ en (1) o $x_i = 0$ para todo i en (2).

Una de las estrategias más simple y fructífera a la hora de resolver problemas de desigualdades consiste en **transformar nuestras desigualdades** en alguna de las formas (1) o (2). Este proceso no es simple, por lo que conviene conocer otras desigualdades de aspecto más complejo pero que básicamente se reducen a las anteriores. Sea $x = a - b$ con $a > 0$ y $b > 0$, entonces se tiene la siguiente secuencia de equivalencias:

$$(1) \iff a^2 + b^2 \geq 2ab \iff \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \iff (\text{haciendo } y = a/b) \ y + \frac{1}{y} \geq 2, \ y > 0$$

$$\iff 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \iff \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

De este modo podemos ver cómo nuestras inofensivas desigualdades de partida empiezan a tomar aspectos más aterradores, pero ¿qué tal si reemplazamos a y b por \sqrt{a} y \sqrt{b} ?

$$(1) \iff a + b \geq 2\sqrt{ab} \iff \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a + b}.$$

A partir de aquí se deduce la siguiente secuencia de desigualdades que resultarán fundamentales. Estas desigualdades reciben el nombre de *desigualdades de las medias armónicas-geométricas-aritméticas-cuadráticas* o desigualdades HM-GM-AM-QM:

Desigualdades de las medias:

$$\min(a, b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a, b).$$

Reconocer las desigualdades anteriores bajo cualquier situación que puedan aparecer en los distintos problemas puede ser una gran ventaja a la hora de resolverlos. Los siguientes ejemplos ilustran lo que acabamos de decir:

Ejemplo 1. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ para todo x .

Ejemplo 2. Si $a, b, c \geq 0$ entonces $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Ejemplo 3. Si $a_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ entonces

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n.$$

La desigualdad HM-GM-AM-QM se tiene incluso en la siguiente versión más general. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \min(a_1, a_2, \dots, a_n) &\leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ &\leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

La siguiente desigualdad es conocida como **la desigualdad de Nesbitt**: sean a, b, c números no negativos, entonces

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Es útil saber que el término de la izquierda, que denotaremos por $f(a, b, c)$, se puede reescribir de las siguientes maneras:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3; \\ \frac{1}{2}[(a+b) + (b+c) + (c+a)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3. \end{aligned} \quad (3)$$

A continuación ofrecemos dos pruebas de la desigualdad de Nesbitt:

1. Sean $x = a + b$, $y = b + c$ y $z = a + c$, entonces

$$\begin{aligned} 2f(a, b, c) &= (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 6 \\ &= \underbrace{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{x}{z} + \frac{z}{x}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{y}{z} + \frac{z}{y}}_{\geq 2} - 3 \geq 3 \end{aligned}$$

2. Ahora demostraremos la desigualdad de Nesbitt usando la desigualdad entre las medias aritméticas y armónicas aunque primero deberemos transformarlas para poder aplicar (3):

$$\frac{u + v + w}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}} \iff (u + v + w) \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right) \geq 9.$$

Por tanto, $f(a, b, c) \geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}$.

Igualdades. Un problema muy interesante y que sirve para resolver ecuaciones en lugar de inecuaciones es estudiar cuándo las desigualdades anteriores son igualdades. En el caso de las desigualdades de medias, estas son igualdades si, y sólo si, todos los números son iguales.

2. Desigualdad triangular

Otro tipo de desigualdades de gran interés son las que se pueden asociar con las longitudes a, b y c de los lados de un triángulo. La desigualdad triangular suele tomar los siguientes aspectos equivalentes (se supone que a, b y c representan las longitudes de los lados de un triángulo):

1. $a + b > c, b + c > a, c + a > b$.
2. $a > |b - c|, b > |a - c|, c > |a - b|$.
3. $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > 0$.

Por supuesto no toda terna (x, y, z) de números reales positivos se corresponde con los lados de un triángulo, sin embargo sí que a toda terna le puede asociar otra (a, b, c) que sí se corresponde con los lados de un triángulo. Basta con aplicar las fórmulas, $a = y + z$, $b = z + x$ y $c = x + y$.

3. La desigualdad de Cauchy-Schwarz

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es una de las desigualdades de mayor utilidad en matemáticas. Dados a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_n dos colecciones de n números reales, entonces

Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Una forma fácil de demostrarla es considerar el siguiente polinomio de segundo grado,

$$P(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Puesto que $P(x) \geq 0$ para todo número real x , se tiene que el discriminante de la ecuación $P(x) = 0$ es negativo. La desigualdad de Cauchy-Schwarz sigue inmediatamente a partir de aquí.

Una de las aplicaciones más inmediatas de esta desigualdad es la desigualdad entre las medias aritméticas y cuadráticas para n números.

$$(1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n)^2 \leq (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

4. Desigualdades de ordenación

Sean a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_n dos colecciones de n números reales y sea c_1, \dots, c_n una permutación de los números b_1, b_2, \dots, b_n . Nos preguntamos cuáles de las $n!$ posibles sumas del tipo

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n$$

son extremales, es decir, dan la mayor y la menor de todas las posibles sumas. Este problema no es difícil de resolver ya que se puede reducir a estudiarlo para $n = 2$. De hecho, para $n = 2$ tenemos la situación

$$a_1c_1 + a_2c_2 - (a_1c_2 + a_2c_1) = (a_1 - a_2)(c_1 - c_2),$$

donde se puede apreciar que, si $a_1 \geq a_2$, esta diferencia es la mayor posible si $c_1 \geq c_2$. El resultado general dice que la suma $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ es la mayor posible si ambas colecciones están ordenadas de modo creciente o decreciente, mientras que la suma es la menor posible si una colección se ha ordenado de modo creciente mientras que la otra se ha hecho de modo decreciente. Este resultado es fácil de visualizar si supones que puedes elegir entre billetes de 50, 20 y 10 euros y que puedes elegir 4, 3 y 2 de cada tipo. Obviamente la mayor cantidad se obtendrá si elegimos cuatro billetes de 50, 3 de 20 y 2 de 10.

Las siguientes desigualdades se pueden obtener como una aplicación de las desigualdades de ordenación:

1. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ para cualesquiera números reales.
2. $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$ para cualesquiera números positivos.

Otra aplicación de las desigualdades de ordenación son **las desigualdades de Chebyshev**. Sean a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_n dos colecciones de n números reales ordenadas de igual modo, o bien creciente o decrecientemente, entonces

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \dots + a_n b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1}. \end{aligned}$$

Sumando todas estas desigualdades, se obtiene

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n),$$

de donde se deduce inmediatamente la primera desigualdad de Chebyshev para colecciones de números con igual orden:

Desigualdad de Chebyshev:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

Si se repite el mismo razonamiento pero partiendo de dos colecciones de números reales ordenadas una decreciente y a la otra crecientemente, se llega a la desigualdad de Chebyshev para colecciones de números de orden contrarios:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

Otra desigualdad que se puede obtener a partir del principio de ordenación es la desigualdad de Nesbitt. Inténtalo.

Ejercicio. Encuentra el mínimo de $\frac{\text{sen}^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\text{sen} x}$ para $0 < x < \pi/2$.

5. Igualdades de triángulos

Si a, b y c son los lados de un triángulo, α, β y γ son, respectivamente, sus ángulos opuestos, A su área y R su circunradio, entonces se tienen las siguientes desigualdades:

Igualdad del Coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Igualdad del Seno:

$$\frac{a}{\text{sen} \alpha} = \frac{b}{\text{sen} \beta} = \frac{c}{\text{sen} \gamma} = 2R.$$

Fórmula para el área:

$$A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\beta.$$

Estas igualdades suelen ser muy útiles cuando se trata de probar relaciones entre distintos elementos de un triángulo

6. La desigualdad de Jensen

Esta desigualdad nos permite dar una desigualdad entre una media aritmética y su imagen mediante una función convexa (es decir, de segunda derivada positiva). Sean a_1, \dots, a_n n números reales y f una función convexa, entonces

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n}.$$

Esta desigualdad admite una expresión más general. Sean t_1, t_2, \dots, t_n número entre 0 y 1 y tales que $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, entonces, si f es convexa,

$$f(t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_na_n) \leq t_1f(a_1) + t_2f(a_2) + \dots + t_nf(a_n).$$

Si la función f es cóncava entonces se tiene la desigualdad contraria.

$$f(t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_na_n) \geq t_1f(a_1) + t_2f(a_2) + \dots + t_nf(a_n).$$

Dos técnicas muy prácticas: simetría y homogeneización.

Es bastante habitual que una desigualdad dada sea equivalente a otra desigualdad que, al menos en apariencia, es más simple. No hay una técnica general que se pueda aplicar de modo universal para lograr este objetivo, sin embargo sí hay ocasiones en que, si miramos muy atentamente nuestra desigualdad, se pueden aplicar ciertas técnicas que ayuden a simplificarla. Esto ocurre, por ejemplo, cuando la desigualdad de partida tiene rasgos de simetría entre sus variables (es decir, la posición de las distintas variables no cambia la desigualdad) o bien de homogeneización (todos los sumandos son del mismo grado polinomial). Veamos algunos ejemplos:

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ es homogénea (todos los términos son de grado 2) y simétrica (si (a, b) es solución entonces (b, a) también lo es).
2. $ab + b^2 \geq 0$ es homogénea pero no simétrica ($(-1, 10)$ es solución pero $(10, -1)$ no lo es).

Las simplificaciones que podemos hacer en estos casos son: si la ecuación es simétrica entonces podemos suponer que las variables están ordenadas de menor a mayor ($a \leq b \leq$

$c \leq \dots$); si la ecuación es homogénea entonces se puede multiplicar por un factor que haga el problema más simple. Por ejemplo, probemos que

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

es cierto para a, b y c positivos. Bien, es fácil ver que la desigualdad es simétrica y homogénea. Por tanto podemos suponer que $a \leq b \leq c$ y que (multiplicando por $1/a^3$) obtenemos una nueva ecuación donde $a = 1$ e introducimos las nuevas variables $x, y \geq 0$ tales que $b = 1 + x$ e $y = 1 + y$, de este modo pasamos de una desigualdad en tres incógnitas a otra en dos incógnitas. A continuación sustituimos, simplificamos y procedemos como se indica:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + x^2 + y^2 &\geq x^2y + xy + xy^2 \\ \iff x^3 + y^3 + x^2 - xy + y^2 - xy(x + y) &\geq 0 \\ \iff x^3 + y^3 + (x - y)^2 + xy - xy(x + y) &\geq 0 \\ \iff (x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy) + xy &\geq 0 \\ \iff (x + y + 1)(x - y)^2 + xy &\geq 0. \end{aligned}$$

Referencias

- [1] Arthur Engel, Problem-solving strategies, Springer-Verlag 1998.
- [2] Página web Olimpiada Matemática Española:
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_c/sanchez/loc2005.html

1. Sean a, b y c las longitudes de las caras de un triángulo. Probar que:

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c},$$

y determina cuándo se da la igualdad.

2. Encuentra todas las soluciones de números reales positivos a, b, c y d del siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b + c + d = 12$$

$$abcd = 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

3. Sean a, b y c tres números positivos:

a) Probar que $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.

b) Probar que $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$.

4. Los números reales x, y, z y t satisfacen la igualdad $x + y + z + t = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$, probar que:

$$-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0.$$

5. Sean x, y y z tres números reales. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $x, y, z > 0$ y $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$.

b) Para todo cuadrilátero con lados a, b, c y d , $a^2x + b^2y + c^2z > d^2$.

6. Encuentra todas las soluciones reales al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{4x^2}{1 + 4x^2} = y,$$

$$\frac{4y^2}{1 + 4y^2} = z,$$

$$\frac{4z^2}{1 + 4z^2} = x.$$